به نام خداوند جان و خرد

نام و نام خانوادگی: آزمون میان ترم: تحقیق پیشرفته آذر ماه ۹۲ زمان: ۱۲۰ دقیقه

۱. شرکتی می خواهد ۸۰۰ هکتار از زمین های نزدیک یک دریاچه را جهت ساخت یک شهرک ویلایی برای خانواده های یک، دو و سه نفره تخصیص دهد. محدودیت های زیر برای ساخت و ساز وجود دارد:

الف: فقط خانه برای خانواده های ۱، ۲ و ۳ نفره قابل ساخت است و تعداد واحدها برای خانواده های یک نفره باید حداقل ۵۰ درصد کل باشد.

ب: زمین تخصیصی به خانه های خانواده های ۱ و ۲ و ۳ نفره به ترتیب ۲، ۳ و ۴ هکتار است.

ج: برای هر ۲۰۰ نفر حداقل یک زمین بازی به وسعت یک هکتار ساخته شود.

د: برای حفظ محیط زیست، آبهای زیرزمینی جهت مصارف خانگی و آبرسانی فضای سبز نباید استفاده شود.

و: ۱۵ درصد از کل زمین ها باید به محوطه سازی اختصاص داده شود. سود حاصله از ساخت خانه برای خانواده های یک، دو و سه نفره به ترتیب برابر ۱۰۰۰۰، ۱۲۰۰۰ و ۱۵۰۰۰ دلار تخمین زده می شود. میزان مصرف آب توسط تمام خانه ها باید حداکثر ۲۰۰۰۰۰ گالن در روز باشد. میزان مصرف آب برای هر خانه ۱، ۲ و ۳ نفره به ترتیب ۴۰۰، ۶۰۰ و ۸۴۰ گالن در روز و برای زمین بازی ۴۵۰ گالن در روز است. مدلی بنویسید که سود حاصله از ساخت خانه ها ماکزیمم شود.

2. Show that an unbounded polyhedral set of the form $\{x : Ax = b,\ x \geq 0\}$ has at least one extreme direction. In particular, using the normalized direction set D in lieu of X in the proof of Representation Theorem, show how you can start with any direction d in D and reduce it to an extreme direction.

3. Consider the linear program: Minimize cx subject to $Ax \leq b,\ x \geq 0$, where c is a nonzero vector. Suppose that the point x_0 is such that $Ax_0 < b$ and $x_0 > 0$. Show that x_0 can not be an optimal solution.

4. Consider the following simplex tableau for a minimization problem (the constraints are of the type $\leq$ and $x_3,\ x_4$ and x_5 are the slacks).

z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
1	0	a	0	b	0	f
0	1	-2	0	1	0	c
0	0	-3	1	-2	0	d
0	0	0	0	3	1	e

Suppose that $a > 0,\ b \leq 0$; and $c, d, e \geq 0$.

a) Give the original tableau (in terms of the unknowns).

$b)$ Give an extreme direction.

$c)$ Let $a = 5$ and $f = -10$. Give a feasible solution having $z = -150$.

5. Show that cycling can never occur, even in the presence of degeneracy, provided that a unique minimum is obtained in the computation $min_{1 \leq i \leq m}\{\frac{\bar{b_i}}{y_{ik}} : \ y_{ik} > 0\}$, where x_k is the entering variable.

6. Is it possible that the optimal solution value of the big-M problem is unbounded and at the same time the optimal solution of the original problem is bounded? Discuss in detail.